Risoluzione Problemi Campionato Tappa di Dicembre

Problema Dicembre (cat. 1-2 Media)

Testo:

Come tutti i 25 dicembre, Babbo Natale deve consegnare i regali a tutti i bambini buoni. Nella via dove abita Gigi ci sono 13 bambini ai quali Babbo Natale deve portare i regali. I bambini abitano tutti su un unico lato della strada e tutti abitano equidistanti il precedente dal successivo. Il primo bambino abita all'inizio della via mentre l'ultimo abita alla fine. Sapendo che il tempo che impiega Babbo Natale a portare il regalo a un bambino è di 2 minuti, e il tempo per passare tra una casa e l'altra è di 30 secondi, quanto tempo (espresso in minuti) ci metterà Babbo Natale a consegnare i regali ai bambini di quella via, una volta arrivato sopra la casa del primo bambino?

Svolgimento:

Per risolvere questo problema è utile disegnarsi la strada con le 13 abitazioni equidistanti, che partono da inizio via e arrivano fino alla fine. Sappiamo che ci sono 12 spazi tra le case e 13 case da servire, quindi Babbo Natale ci metterà 6 minuti per passare tra le case e 13x2=26 minuti per servirle tutte e 13. Quindi sommando i due tempi ci metterà 32 minuti.

Problema Dicembre (cat. 3 media-1 Superiore)

Testo:

Edo e Gigi stanno giocando a "punto scaccia punto". Il primo giocatore propone un numero di punti distinti, la mossa dell'avversario consiste nel dire un numero di punti che sia una frazione intera del numero di divisori del numero di linee che si possono formare collegando a due a due i punti proposti inizialmente. Ad esempio, se Edo gioca 12 punti, tra questi si possono formare 66 linee, i cui divisori sono 8. Gigi, come numero, può dire uno tra le frazioni intere di questo, ovvero $\frac{8}{2}$(cioè 4),$\frac{8}{1}$, etc… Il gioco prosegue finché o un giocatore sbaglia o si arriva a 1. Se Gigi propone 85086, quanti numeri può giocare Edo?

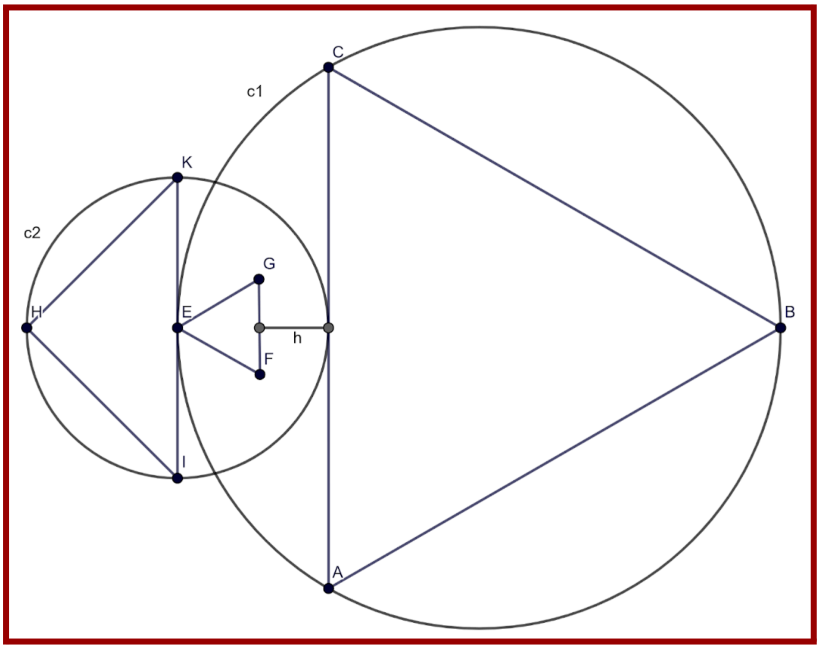
Svolgimento

Partiamo calcolando il numero di linee che si possono formare con 85086 punti: $n = \frac{85086 \cdot 85085}{2}$=3619771155. Scomponiamo: $n = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 163$, i cui divisori sono $2^7 \cdot 3 = 384$. Infatti, il numero dei divisori equivale al prodotto tra gli esponenti aumentati di 1 dei fattori primi. Per calcolare le frazioni intere di 384 basta calcolarne i divisori, che sono 8·2=16.

Problema Dicembre (cat. 2-3 Superiore)

Testo:

Alla DiarikTower Gigi, Simo, e Dani stanno decidendo come decorare le palline di Natale. Simo, quindi, propone un ricamo molto interessante e gli amici chiamano Alex per metterlo alla prova, e gli domandano quanto misura il segmento h che ha un estremo sul lato GF e uno sulla circonferenza c2 dove AC vi è tangente. Nel ricamo sono presenti due circonferenze, tali che quella di raggio maggiore (c1) passi per il centro di quella di raggio minore (c2). Inoltre sono presenti tre triangoli: il baricentro di ABC coincide col centro di c1; HIK è inscritto in c2 e tangente a c1 nel punto E; il triangolo EFG è equilatero. Poi si sa che i punti B, E, H e il segmento h sono allineati, che il raggio di c1 misura R, che EG= ((√3)/6)R, e che il segmento h è parte degli assi dei lati CA e GF. Quanto misura il rapporto tra l'altezza di HIK rispetto al lato KI, e h? (La figura non rispetta le proporzioni)



Svolgimento:

Poichè il baricentro di ABC coincide col centro di c1, il triangolo in questione è equilatero. Perciò il tratto da B al punto di tangenza tra ABC e c2 misura $\frac{3}{2}$R: la relazione tra il lato di un triangolo equilatero e il raggio della circonferenza circoscritta è $L = R\sqrt{3}$; l'altezza vale $\frac{L}{2}\sqrt{3}$, perciò quel tratto misura $\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}= \frac{3}{2}$R .

Perciò, il raggio della circonferenza c2 vale r = $2R - \frac{3}{2}R = \frac{1}{2}R$. Poiché il punto E è il centro di c2, il triangolo HIK è rettangolo in KHI, e la sua altezza misura $\frac{1}{2}r$ (H e E sono allineati). I triangoli CBA e EGF sono simili, e la loro costante di similitudine vale $k= \frac{\sqrt{3}}{6} : \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{1}{6}$. Perciò l'altezza di EGF misura $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$. Perciò, visto

$h=\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. $\frac{HE}{h}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2$.

Problema Dicembre (cat. 4-5 Superiore)

Testo:

Per Natale Gianpietro ha chiesto un particolare gioco delle freccette. Il ragazzo, infatti, non vuole il classico tabellone a punti, bensì un globo terrestre a forma di sfera, che ruota su se stesso con velocità variabili. Inoltre, questo è integrato da 2 dadi elettronici, dal cui lancio dipende la posizione del globo che si mostra al giocatore. Se dalla somma del lancio dei dadi esce un numero dispari, il globo mostrerà una zona che va da 70º est a 70º ovest. Se esce un numero pari non primo, mostra una zona che va da 70º a 180º est. Infine, se esce un numero pari primo, mostra una zona che va da 70º a 180º ovest. Inoltre, nel globo sono segnati marcatamente l'equatore e un parallelo, che si trova a 30º nord rispetto all'equatore; l'unica zona da 4 punti è quella compresa tra di essi. Se quando giocherà Gianpietro lanciasse una freccetta, e volesse fare quattro punti colpendo in una zona di longitudine compresa tra 70º a 180º est, qual è la probabilità che ci riuscirà?
(Si fornisca come soluzione la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini della probabilità)

Svolgimento:

Partiamo calcolando la probabilità che al tiro dei dadi esca un numero pari. In tutto si possono ottenere 36 somme. Tra queste, quelle per cui esce un numero pari sono 18, a cui ne va sottratta 1, ovvero 1+1=2 che è l'unico pari primo. Quindi, la probabilità per cui esca un pari non primo è $\frac{17}{36}$. Ora, è necessario calcolare la probabilità di colpire la zona da 4 punti, e per fare ciò calcoliamo la probabilità di colpire quell'area. L'area da 4 punti è la superficie di un segmento sferico a 2 basi, la formula della cui area è: $A=2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$, dove h indica l'altezza. Perciò,costruendo un triangolo rettangolo che abbia come ipotenusa il raggio e un punto appartenga al parallelo di interesse, riusciamo a ricavare con pitagora l'altezza, ovvero $h= r \cdot sen(30)$. La probabilità di colpire quell'area è rappresentata dalla formula: $P= \frac{Area\ interessata}{Area\ totale}$, l'area totale è l'area della sfera, perciò $P=\frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r \cdot sen(30)}{4\pi \cdot r^2} = \frac{sen(30)}{2} = \frac{1}{4}$. Perciò, la probabilità di colpire nella zona da 4 punti, essendo le due

probabilità indipendenti tra loro, è il prodotto logico di due eventi indipendenti.
Perciò, P=$\frac{17}{36}\cdot\frac{1}{4}=\frac{17}{144}$. La somma tra numeratore e denominatore risulta essere 161.

Allenamento per la tappa di Gennaio:

CI.1 Riso patate e cozze

C'è chi lo chiama riso patate e cozze, chi riso cozze e patate... ogni ingrediente in un ordine diverso. Quanti nomi diversi potrebbe avere questo piatto?

(6)

CI.2 Social distancing

Presso un ristorante si trova un gruppo di n persone e la distanza tra due persone qualsiasi del gruppo è sempre di esattamente 1 metro, né di più né di meno. Quante persone ci sono al massimo al ristorante?

(3)

CI.3 Area di un trapezio

Sia ABCD un trapezio in cui i lati paralleli sono AB e CD. Sapendo che gli angoli in A, B sono acuti, e che i lati hanno le seguenti misure: AB = 69,BC = 60,CD = 6, DA = 39, quanto vale l'area del trapezio?

(1350)

CI.4 Pasticciere pasticcione

Un pasticciere pasticcione ha scordato di pagare la bolletta della luce, lasciando il suo laboratorio al buio. Nel suo laboratorio però c'erano tre tipi di dolci, tutti indistinguibili al buio: sospiri, bignè e cassate. Tuttavia sa benissimo che per essere certo di prendere una cassata doveva estrarre in totale 56 dolcetti, per essere certo di prendere un sospiro ne doveva prendere 71, per essere certo di prendere un bignè ne doveva prendere 92. Detti S, B, C rispettivamente il numero di sospiri, di bignè e di cassate presenti nel laboratorio, quanto vale il prodotto S·B·C?
Il sospiro è un dolce tipico pugliese, in particolare di Bisceglie.

(4238)

Questi problemi di allenamento sono tratti dalla VI edizione della One Hundred Problems. Ringraziamo Mattysal (Matteo Salicandro) per averci consentito di proporli come allenamento.